現代数学
最終レポート

酒井政裕

2003 年 7 月 28 日

1. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ とする。z 軸のまわりの α 回転

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と x 軸の回りの α 回転

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

についてつぎを帰納法によって証明せよ。w を p, q で生成される長さ $k > 0$ の語であるとするとき、

$$w(P,Q)(1,0,0)^t = \frac{1}{3^k}(a, \sqrt{2}b, c)^t \qquad (a,b,c \in \mathbb{Z})$$

が成立する。ただし、b は 3 で割りきれない。また、$w(P,Q)$ は w 内の p, q に P, Q を代入したものである。$k = 1$ の場合、たとえば $P(1,0,0)^t = \frac{1}{3}(1, -2\sqrt{2}, 0)^t$ などをみればよい（もちろん、すべてをチェックしなければならない）。それ以降については $w = p^{\pm1}q^{\pm1}v$ などを調査すればよい（全部で 8 通りある）

$w = q^{\pm k}$ のとき、

$$w(P,Q)(1,0,0)^t = Q^{\pm k}(1,0,0)^t = \frac{1}{3}(3, 0\sqrt{2}, 0)^t$$

となり、b が 3 で割り切れてしまい、w が q のみからなる場合は明らかに条件を満たさない。

したがって以下では講義資料に基づいて、w の右端の文字を $p^{\pm1}$ であるとした場合に限って証明する。

$k = 1$ のとき

$$w(P,Q) = P^{\pm1}(1,0,0)^t = \frac{1}{3}(1, \pm2\sqrt{2}, 0)^t$$

であるので、条件を満たしている。

$k > 1$ のとき、

w は $p^{\pm1}w'$ または $q^{\pm1}w'$ の形である。帰納法の仮定から $w'(P,Q)(1,0,0)^t = \frac{1}{3^k}(a', \sqrt{2}b', c')^t$ であり、b' は 3 で割り切れない。

まずは、$w(P,Q)(1,0,0)^t = \frac{1}{3^k}(a, \sqrt{2}b, c)^t$ という形で表せる事を示そう。

$w = p^{\pm 1} w'$ のとき、

$$w(P,Q)(1,0,0)^t = P^{\pm 1} w'(1,0,0)^t = P^{\pm 1}\frac{1}{3^{k-1}}(a', \sqrt{2}b', c')^t = \frac{1}{3^k}(a' \mp 4b', (\pm 2a' + b)\sqrt{2}, 3c')^t$$

より、

$$\begin{cases} a &= a' \mp 4b' \\ b &= \pm 2a' + b' \\ c &= 3c' \end{cases}$$

$w = q^{\pm 1} w'$ のとき、

$$w(P,Q)(1,0,0)^t = Q^{\pm 1} w'(1,0,0)^t = Q^{\pm 1}\frac{1}{3^{k-1}}(a', \sqrt{2}b', c')^t = \frac{1}{3^k}(3a', (b' \mp 2c')\sqrt{2}, \pm 4b' + c')^t$$

より、

$$\begin{cases} a &= 3a' \\ b &= b' \mp 2c' \\ c &= \pm 4b' + c' \end{cases}$$

次に b が 3 で割り切れない事を、場合分けして示す。
$w = p^{\pm 1} q^{\pm 1} v$ (符号任意) のとき、

$$b = \pm 2a' + b' = \pm 6a'' + b'$$

$w = q^{\pm 1} p^{\pm 1} v$ (符号任意) のとき、

$$b = b' \mp 2c' = b' \mp 6c''$$

$w = p^{\pm 1} p^{\pm 1} v$ (符号同順) のとき、

$$b = \pm 2a' + b' = \pm 2(a'' \mp 4b'') + b' = \pm 2a'' - 8b'' + b' = (\pm 2a'' + b'') - 9b'' + b' = b' - 9b'' + b' = 2b' - 9b''$$

$w = q^{\pm 1} q^{\pm 1} v$ (符号同順) のとき、

$$b = b' \mp 2c' = b' \mp 2(\pm 4b'' + c'') = b' - 8b'' \mp 2c'' = b' - 9b'' + (b'' \mp 2c'') = b' - 9b'' + b' = 2b' - 9b''$$

帰納法の仮定より b' は 3 で割り切れないので、いずれの場合も b は 3 で割り切れない。

したがって、帰納法により、w の右端の文字が $p^{\pm 1}$ であるならば、

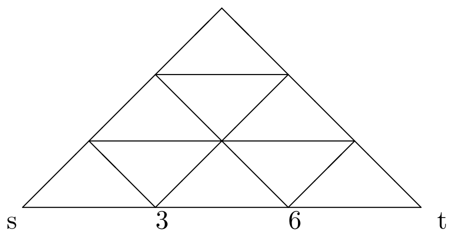
$$w(P,Q)(1,0,0)^t = \frac{1}{3^k}(a, \sqrt{2}b, c)^t \qquad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

が成立し、b は 3 で割りきれないことが証明された。

2. graph $G(V,E)$

$$V=\{s,2,3,4,5,6,7,8,9,t\}$$

$$E=\{s2,s3,23,24,25,35,36,45,47,48,56,58,59,69,6t,78,89,9t\}$$



において、方程式 $\Delta f=g$ を解け。ここで、$f,g\in\mathbb{R}^V$ であり、

$$g(s)=-1,\quad g(t)=1,\quad g(x)=0\ (x\neq s,t)$$

とする。

$\Delta:\mathbb{R}^V\to\mathbb{R}^V$ の定義、

$$(\Delta f)(x)=\sum_{xy\in E}[f(y)-f(x)]$$

より

$$\begin{cases}
(f(2)-f(s))+(f(3)-f(s)) & = & -1\\
(f(s)-f(2))+(f(3)-f(2))+(f(4)-f(2))+(f(5)-f(2)) & = & 0\\
(f(s)-f(3))+(f(2)-f(3))+(f(5)-f(3))+(f(6)-f(3)) & = & 0\\
(f(2)-f(4))+(f(7)-f(4))+(f(8)-f(4))+(f(5)-f(4)) & = & 0\\
(f(2)-f(5))+(f(3)-f(5))+(f(4)-f(5))+(f(6)-f(5))+(f(8)-f(5))+(f(9)-f(5)) & = & 0\\
(f(5)-f(6))+(f(3)-f(6))+(f(9)-f(6))+(f(t)-f(6)) & = & 0\\
(f(4)-f(7))+(f(8)-f(7)) & = & 0\\
(f(7)-f(8))+(f(4)-f(8))+(f(5)-f(8))+(f(9)-f(8)) & = & 0\\
(f(8)-f(9))+(f(5)-f(9))+(f(6)-f(9))+(f(t)-f(9)) & = & 0\\
(f(9)-f(t))+(f(6)-f(t)) & = & 1
\end{cases}$$

これを解いて、

$$\begin{cases}
f(s) & = & \frac{10}{7}+f(t),\\
f(2) & = & \frac{20}{21}+f(t),\\
f(3) & = & \frac{19}{21}+f(t),\\
f(4) & = & \frac{16}{21}+f(t),\\
f(5) & = & \frac{5}{7}+f(t),\\
f(6) & = & \frac{11}{21}+f(t),\\
f(7) & = & \frac{5}{7}+f(t),\\
f(8) & = & \frac{2}{3}+f(t),\\
f(9) & = & \frac{10}{21}+f(t),
\end{cases}$$