Elementary universal mapping properties その 2

総合政策学部 2 年
酒井政裕

2002 年 6 月 28 日

1 Product(続き)

1.1 交換法則, 単位元, 結合法則

数の乗算と同様に、これらの基本的な法則が成り立つ。(ただしイコールについてではなく同型関係について)

$$A \times B \cong B \times A \tag{1}$$
$$\mathbf{1} \times A \cong A \times \mathbf{1} \cong A \tag{2}$$
$$A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C \tag{3}$$

これらは、個別のユニバーサル・マッピング・プロパティから導出する事が出来るが、product の定義を拡張してオブジェクトの族 (family) に対しても定義してやることで、**直接**導くことが出来る。

まず、I をインデックスの集合とし、I の各元 i について C_i を C のオブジェクトとする。C_i と C_j が同じオブジェクトでも構わないし、I は空でも構わない。

定義 1 *A* **product** *of this indexed family is an object P together with maps $P \xrightarrow{p_i} C_i$ (one for each i), having the universal property:*

Given any object X and any maps $X \xrightarrow{f_i} C_i$ (one for each i) there is exactly one map $X \xrightarrow{f} P$ such that all the triangles below commute, i.e. such that $p_i f = f_i$ for each i in I.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "p_i"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f_i"'] & & C_i \end{tikzcd}$$

定理 1 *(product の一意性)* 射 $P \xrightarrow{p_i} C_i$ と $Q \xrightarrow{q_i} C_i$ が、P と Q を共にこの族の *product* とするのならば、*(Q が product であることより)*I に含まれる各 i について $q_i f = p_i$ となるような射 $P \xrightarrow{f} Q$ がただ一つだけ存在し、同型射である。

証明　前回やった、ペアのオブジェクトの product の場合とほとんど同じなので、証明は略。

ある族の product を $\prod_I C_i$ と表記し、その projection map を p_i と表記する。

演習 1

$$\begin{tikzcd} & C_a \\ P \arrow[ur, "p_a"] \arrow[dr, "p_a"'] & \\ & C_b \end{tikzcd}$$

と

$$\begin{tikzcd} & P \\ Q \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "q_c"'] & \\ & C_c \end{tikzcd}$$

が *product* ならば、

$$\begin{tikzcd} & C_A \\ Q \arrow[ur, "p_a q"] \arrow[r, "p_a q"] \arrow[dr, "q_c"'] & C_b \\ & C_c \end{tikzcd}$$

は *triple product* であることを示せ。

この exercise で $(C_a \times C_b) \times C_c$ がこの族の triple product であることが言えた。同様に、$C_a \times (C_b \times C_c)$ もこの族の triple product であることが言える。したがって、product の一意性から、$(C_a \times C_b) \times C_c \cong C_a \times (C_b \times C_c)$

2 Sum

Product の双対。Coproduct とも呼ばれる。

定義 2 *A pair $B_1 \xrightarrow{j_1} S$ $B_2 \xrightarrow{j_2} S$ makes S a* **sum** *of B_1 and B_2 if each object Y and each pair $B_1 \xrightarrow{g_1} Y$, $B_2 \xrightarrow{g_2} Y$, there is exactry one map $S \xrightarrow{g} Y$ for which both $g_1 = gj_1$ and $g_2 = gj_2$.*

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[dr, "j_1"'] \arrow[drr, "g_1"] & & \\ & S \arrow[r, "g"] & Y \\ B_2 \arrow[ur, "j_2"] \arrow[urr, "g_2"'] & & \end{tikzcd}$$

Note: The maps j_1, j_2 are called **injection** *map for the sum. As with products, we often choose a special sum of B_1 and B_2 and denote it by $B_1 + B_2$, j_1, j_2.*

product において、$X \to A \times B$ が $X \to A$, $X \to B$ と同じ情報を持っていたのと同様に、sum では $A + B \to X$ が $A \to X$, $B \to X$ と同じ情報を持っている。

$$\frac{X \to A \times B}{X \to A, X \to B}, \frac{A + B \to X}{A \to X, B \to X}$$

2.1 交換法則, 単位元, 結合法則

Product と同様。

$$A + B \cong B + A \tag{4}$$

$$\mathbf{0} + A \cong A + \mathbf{0} \cong A \tag{5}$$

$$A + (B + C) \cong (A + B) + C \tag{6}$$

また、ある族の Coproduct を $\coprod_I C_i$ と表記し、その injection map を j_i と表記する。

3 分配則 / Distributive Law

Product と Sum と Initial object の存在する多くの圏では、Product と Sum の分配則

$$
\begin{aligned}
(A \times B) + (A \times C) &\cong A \times (B + C) && (7) \\
\mathbf{0} &\cong A \times \mathbf{0} && (8)
\end{aligned}
$$

は成り立たない。

しかし、それらの UMP(ユニバーサル・マッピング・プロパティ) を反映した射が存在し、それを standard maps と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
(A \times B) + (A \times C) &\to A \times (B + C) && (9) \\
\mathbf{0} &\to A \times \mathbf{0} && (10)
\end{aligned}
$$

存在の証明

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \times B \to B \quad B \to B + C}{A \times B \to B + C} \quad A \times B \to A}{A \times B \to A \times (B + C)}\,(UMPof\times) \quad \dfrac{A \times C \to A \quad \dfrac{A \times C \to C \quad C \to B + C}{A \times C \to B + C}}{A \times C \to A \times (B + C)}\,(UMPof\times)}{(A \times B) + (A \times C) \to A \times (B + C)}\,(UMPof+)
$$

定義 3 上で定義した射が同型射であるとき、その圏は分配則を満たすという。または、その圏は *distributive* だともいう。

集合の圏, 集合上の自己射 (endomap) の圏, グラフの圏は、分配則を満たす圏の例である。線形圏 (linear category) は distributive でない圏の例である。

distributive でない圏では「sum」という言葉の使用は避けられ、単に product の双対として「coproduct」の方が好まれる。

参考文献

[1] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel "Conceptual Mathematics - A first introduction to categories"