

Elementary universal mapping properties

酒井政裕

2002年6月14日

1 Terminal object

集合の圏では、1要素からなるオブジェクトへは任意のオブジェクト X からの射 (=写像) がユニークに存在したが、多くの他の圏でも同じ性質を持つオブジェクトが存在する。

定義 1 圏 C のオブジェクト S は、 C の各オブジェクト X について C の射 $X \rightarrow S$ がただ一つ存在するとき、terminal object であるという。

このような定義は、その圏の全てのオブジェクト X との関係を使って、あるオブジェクト S の性質を述べているので、しばしば Universal Mapping Property と呼ばれる。

命題 1 (*Uniqueness of Terminal Objects*) S_1, S_2 が共に C の terminal object であるならば、 C の射 $S_1 \rightarrow S_2$ がただ一つ存在し、isomorphism である。

証明 S_2 が terminal object であることより、 $S_1 \rightarrow S_2$ がユニークに存在する。同様に、 S_1 が terminal object であることより、 $S_2 \rightarrow S_1$ がユニークに存在する。

これらを結合することで、endomorphism $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$ と $S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ が得られる。

terminal object の定義より、自分自身からの射はただ一つしか存在しないはずで、またどんなオブジェクトも自分自身への恒等射を持っているので、これは恒等射である。

したがって、 $S_1 \rightarrow S_2$ と $S_2 \rightarrow S_1$ は互いに inverse であり、isomorphism

terminal object が全て同型 (isomorphic) であることが言えたので、これからは通常それらを区別せずに 1 と書く。

terminal objects の定義は単純だが、terminal object 自体は全く trivial というわけではない。実際、codomain が terminal object であるような射 $X \rightarrow 1$ の数えあげは (常に 1 個なので) trivial だと考えられるが、domain が terminal object であるような射 $1 \rightarrow X$ の数えあげは X についての特有の情報をもたらす。

定義 2 1 が圏 C の terminal object であり、 X が C のオブジェクトであるとき、 C の射 $1 \rightarrow X$ は X の point と呼ばれる。

Exercise 1 1 has one point. If $X \xrightarrow{f} Y$ and x is a point of X then fx is a point of Y .

Exercise 2 In category of abstract sets, each point of X 'points to' exactly one element of X and every element of X is the value of exactly one point of X . (Here X is any given abstract set.)

2 Initial object

圏における、多くのオブジェクトや射の定義は、定義における射と結合の向きを反転させてやる (特に domain と codomain を入れ換える) ことで 'dualize' する事が出来る。例えば、terminal object の dual (双対) の概念は以下のようなになる。

定義 3 圏 C のどのオブジェクト X に対しても、射 $S \rightarrow X$ がただ一つだけ存在するようなオブジェクト S を **initial object** と呼ぶ。

集合の圏では、空集合が initial object になる。

Exercise 3 圏 C で S_1 と S_2 が共に *initial* であるならば、(ユニークな) 射 $S_1 \rightarrow S_2$ は *isomorphism* である。

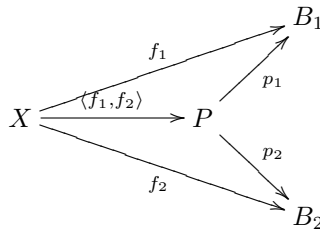
証明 (terminal object の場合とほぼ同じなので省略)

initial object が全て同型である事が言えたので、これからは通常それらを区別せずに 0 と書く。

3 Products

C のオブジェクト B_1, B_2 と、 C の射 $P \xrightarrow{p_1} B_1, P \xrightarrow{p_2} B_2$ が与えられたとする。当然、 $X \xrightarrow{f} P$ は新しい合成射 $X \xrightarrow{p_1 f} B_1, X \xrightarrow{p_2 f} B_2$ を導く。しかし、 P, p_1, p_2 を適切に選ぶことで、この逆も可能になる。

定義 4 An object P together with a pair of maps $P \xrightarrow{p_1} B_1, P \xrightarrow{p_2} B_2$ is called **product** of B_1 and B_2 if for each object X and each pair of maps $X \xrightarrow{f_1} B_1, X \xrightarrow{f_2} B_2$, there is exactly one map $X \xrightarrow{f} P$ for which both $f_1 = p_1 f$ and $f_2 = p_2 f$.



This map f , since it is uniquely determined by f_1 and f_2 , can be denoted by $\langle f_1, f_2 \rangle$. The maps p_1 and p_2 are called *projection maps* for the product.

Exercise 4 If P, p_1, p_2 and also Q, q_1, q_2 are both products of the same pair of objects B_1, B_2 in a given category, then the unique map

$$P \xrightarrow{f} Q$$

for which $p_1 = q_1 f$ and $p_2 = q_2 f$ is an *isomorphism*

証明 P が product であることより定まるユニークな射を

$$Q \xrightarrow{g} P$$

とする。

Q が product であることより、

$$\begin{cases} q_1 f = p_1 \\ q_2 f = p_2 \end{cases}$$

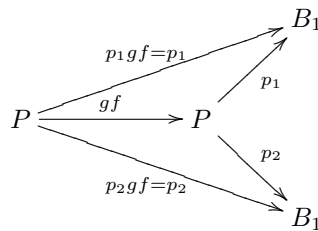
P が product であることより、

$$\begin{cases} p_1 g = q_1 \\ p_2 g = q_2 \end{cases}$$

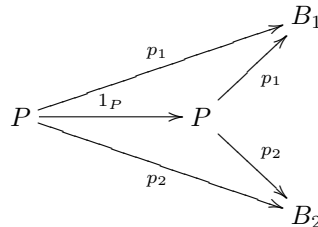
代入して

$$\begin{cases} p_1 g f = p_1 \\ p_2 g f = p_2 \end{cases}$$

したがって、下図が可換になる。



ところで、下図も可換であるので、ここから $gf = \langle p_1 g f, p_2 g f \rangle = \langle p_1, p_2 \rangle = 1_P$ が言える。



同様にして、 $fg = 1_Q$ が言え、 f と g は互いに inverse であり、ゆえに f は isomorphism である。

B_1 と B_2 の product が全て同型であることが言えたので、これからは通常それらを区別せずに $B_1 \times B_2$ と書く

Exercise 5 In a category C with products and a terminal object, each point of $B_1 \times B_2$ is uniquely of the form $\langle b_1, b_2 \rangle$, where b_i is a point of B_i ($i = 1, 2$); and any pair of points of B_1, B_2 are the projectoins of exactly one point of $B_1 \times B_2$.

T を「時間」に相当するオブジェクトとすると、射 $T \rightarrow X$ は「motion in X 」と呼ばれる。そして、 P が P を product にするような B_1 と B_2 への projection と共に定義されているとき、motion in P は 2 つの factor での motion とユニークに対応する。

$$\frac{T \rightarrow B_1 \times B_2}{T \rightarrow B_1, T \rightarrow B_2}$$

参考文献

- [1] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel “Conceptual Mathematics - A first introduction to categories”