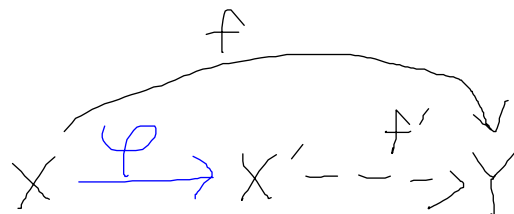


Exercise 1.1.1 (i)

f と f' が同じ maps 上の cartesian morphism

$$\text{cod } f = \text{cod } f'$$



$$f = f' \circ \varphi$$

ル-チソワ-ク(=よ') φ は iso

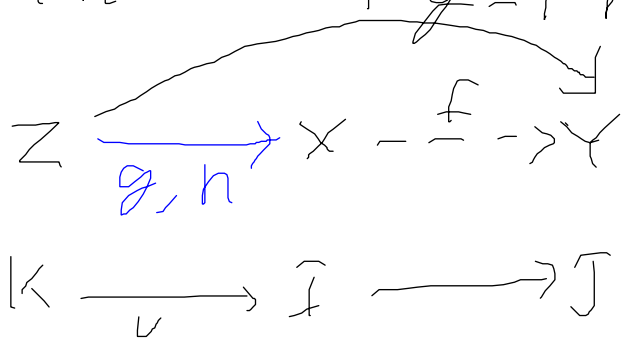
Exercise 1.1.1 (ii)

f cartesian

g and h are above same map

$$f \circ g = f \circ h$$

$$f \circ g = f \circ h$$



g, h は \square を満たす一意な射

Exercise 1.1.2

$f: X \rightarrow Y$ above u

$$p: E \rightarrow B$$

$$u = pf$$

for each Z, v

$$\mathbb{E}_v(Z, X) \xrightarrow[\Phi]{f \circ (-)} \mathbb{E}_{u \circ v}(Z, Y)$$

Φ iso $\Rightarrow f$ is cartesian

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ Z & \xrightarrow[\Phi^{-1}(g)]{} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & & & \\ pZ & \xrightarrow{v} & pX & \xrightarrow{u} & pY \end{array}$$

一意性は明らか

f is cartesian $\Rightarrow \Phi$ iso

$\Phi(f) =$ 一意に決まる射 $Z \rightarrow X$ above v とする
 一意性から $\Phi \Phi h = h$ for h above v
 $\Phi \Phi g = f \circ \Phi g = g$

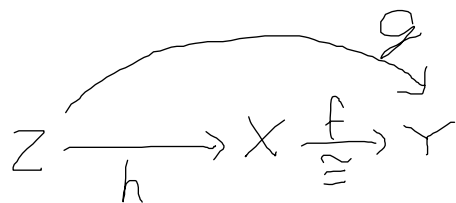
Exercise 1.1.3 (i)

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & & \curvearrowright & & \\ X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

$$\tilde{I} \xrightarrow{id} \tilde{I} \xrightarrow{pf} pY$$

pf 上の cartesian morphism を g とおけば
 $f = g \circ h$ 且 h は vertical

Exercise 1.1.4 (i)



$$pZ \xrightarrow{v} pX \xrightarrow{u} pY$$

$$pf = u$$

$$pg = u \circ v$$

$$ph = v$$

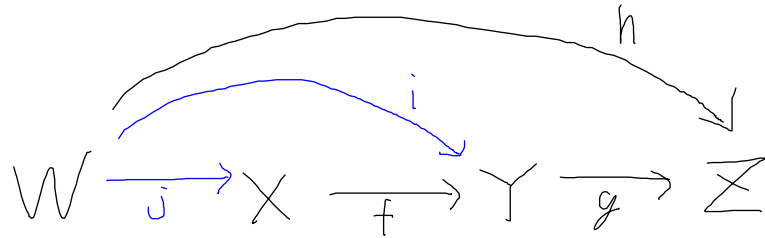
$$g = f \circ h$$

$h = f^{-1} \circ g$ は条件を満たす一意な射

Exercise 1.1.4 (ii)

$f: X \rightarrow Y$ is cartesian

$g: Y \rightarrow Z$ is cartesian



$$pW \longrightarrow pX \longrightarrow pY \longrightarrow pZ$$

g が cartesian であることから i が一意に決まる
 f が cartesian であることから i に対して j が一意に決まる

Exercise 1.1.4 (iii)

$$f: X \rightarrow Y$$

$g: Y \rightarrow Z$ is cartesian

$g \circ f: X \rightarrow Z$ is cartesian

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \xrightarrow{h} & \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & \\
 W & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

$$pW \xrightarrow[w]{} pX \longrightarrow pY \longrightarrow pZ$$

$g \circ f$ が cartesian τ の $\tau = g \circ h$ に対して i が一意に決まる

g が cartesian τ の $\tau = h = f \circ i$

$g \circ h = g \circ f \circ i$ となる $i: W \rightarrow X$ above w が一意に決まる

$$g \circ h = g \circ f \circ i = g \circ f \circ i' \Rightarrow i = i'$$

$$h = f \circ i = f \circ i' \Rightarrow i = i'$$

$h = f \circ i$ となる $i: W \rightarrow X$ above w は一意.

Exercise 1.1.4 (iv)

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{g} \in \text{Cart}(\mathbb{E})(Z, Y) \\
 & \text{Z} \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y & \\
 \mathbb{E} & & \\
 \downarrow p & & \\
 \mathbb{B} & pZ \longrightarrow \tilde{I} \xrightarrow{u} pY &
 \end{array}$$

p が cartesian なので、 u 上の cartesian morphism f が存在

g に対して h が一意に存在

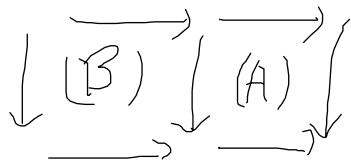
$g = f \circ h$ と f が cartesian なので、(iii) より

h は cartesian

よって、 $|p| : \text{Cart}(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{B}$ は fibration

Exercise 1.1.3 (ii) より、vertical な cartesian morphism は iso なので、 $|p|$ の fibre の射はすべて iso であり、 $|p|$ の fibre は groupoid.

Exercise 1.1.5



cod $\begin{matrix} \mathbb{B} \\ \downarrow \\ \mathbb{B} \end{matrix}$ に対して 1.1.4 (ii), (iii) を適用

Exercise 1.1.6 if part

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{G} \\
 \curvearrowright \\
 Z \xrightarrow{i} W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y
 \end{array}$$

u の weak cartesian morphism を f とする

$$pZ \xrightarrow{v} I \xrightarrow{u} pY$$

\mathcal{G} above u, v が与えられたとする

v の weak cartesian lifting を h とする

(b) より $f \circ h$ は weak cartesian

vertical map i で $g = f \circ h \circ i$ を満たすものが一意存在

$j: Z \rightarrow X$ above v が $g = f \circ j$ を満たしたとする

h が weak cartesian なのて $j = h \circ i'$ を満たす vertical map i' が一意

$$g = f \circ j = f \circ h \circ i'$$

(=存在)

上の i の一意性より $i' = i$ として $j = h \circ i$ は $g = f \circ j$ を満たす一意な射

よって f は cartesian

Exercise 1.1.6 only if part

(a) Cartesian f は "weak cartesian f のこと" 自明

(b) $f: X \rightarrow Y$ が "weak cartesian f " とすると
 $p_f: pX \rightarrow pY$ 上の cartesian morphism
 $f': X' \rightarrow Y$ が存在

f, f' は $\# (= p_f \perp)$ weak cartesian
 f のこと $\# / Y$ で "同型"

weak cartesian は cartesian と一致

cartesian morphism は合成 $\#$
について閉じている

Exercise 1.1.7

$$\mathbb{B} \times \mathbb{C} \downarrow \text{fst} \\ \mathbb{B}$$

$$\mathbb{B} \downarrow \text{id} \\ \mathbb{B}$$

$$\mathbb{B} \downarrow \\ 1 = \{*\}$$

$$X \downarrow \\ I$$

$$(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{(v, f)} (I, Y) \xrightarrow{(u, \text{id})} (J, Y)$$

(u ∘ v, f)

$$K \xrightarrow{v} I \xrightarrow{u} J$$

$$K \xrightarrow{v} I \xrightarrow{u} J$$

u ∘ v

$$K \xrightarrow{v} I \xrightarrow{u} J$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\text{id}} Y$$

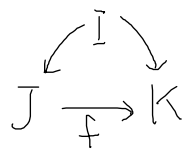
$$1 \longrightarrow 1 \longrightarrow 1$$

$$x \xrightarrow{=} x \xrightarrow{=} x$$

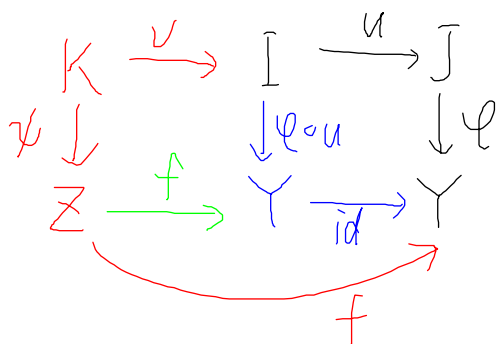
$$i \xrightarrow{=} i \xrightarrow{=} i$$

Exercise 1.1.8 $\text{dom}: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$

(i) opslice category $I \setminus \mathcal{B}$
 object $I \rightarrow J$
 morphism

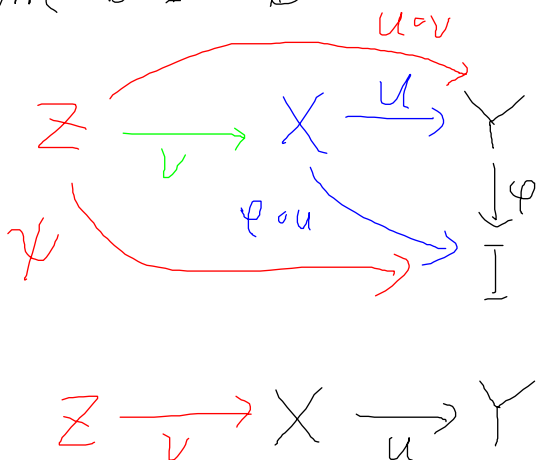


(ii)



外側が可換なので
 $\varphi \circ u \circ v = f \circ \psi$
 よって左側の四角形
 も可換
 一意性は明らか

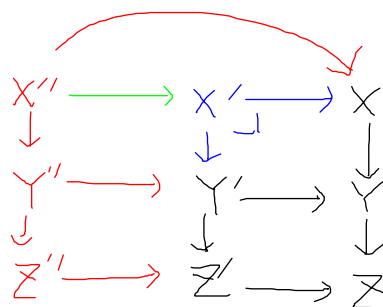
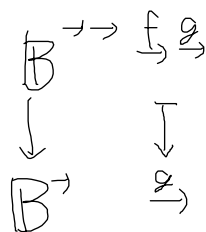
(iii) $\text{dom}: \mathcal{B}/I \rightarrow \mathcal{B}$



外側が可換なので
 $\varphi \circ u \circ v = \psi$
 よって左側の三角形も可換
 一意性は明らか

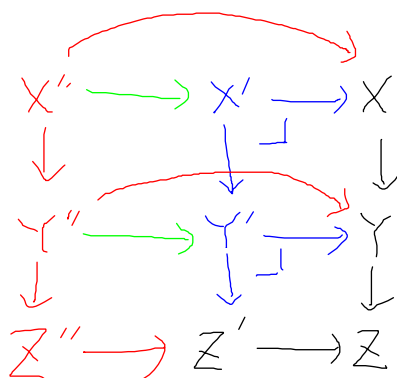
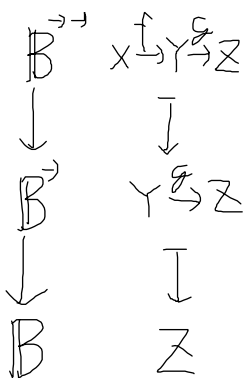


Exercise 1.1.9



X' がpullbackなので
条件を満たす $X'' \rightarrow X$ は
一意に存在

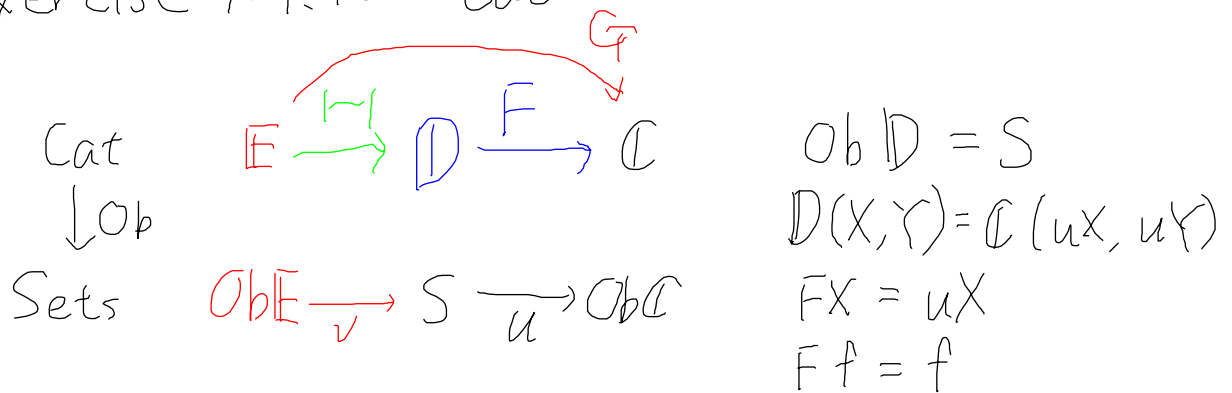
$\therefore \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ は fibration



Y' がpullbackなので条件を満たす
 $Y'' \rightarrow Y'$ は一意
 X' がpullbackなので条件を
満たす $X'' \rightarrow X'$ は一意

\therefore 青字をcartesian liftingとして fibration

Exercise 1.1.10 $Cat \rightarrow Sets$



$$\begin{aligned}
 Hx &= vx & FHx &= uvx = Gx \\
 Hf &= Gf & FHf &= Gf \\
 \therefore FH &= G
 \end{aligned}$$

v 上の \mathcal{C} の object part は一意.
 F が faithful 上の \mathcal{C} の morphism part も一意.
 $\therefore H$ は一意.

$\therefore F$ は u の cartesian lifting \mathcal{C} .
 $Ob: Cat \rightarrow Sets$ は fibration

