向井研
2003年度春学期 最終レポート

酒井政裕

2003 年 7 月 25 日

1　導入 〜 Hylomorphism

Hylomorphism は、長谷川立氏のチュートリアル「パラメトリック・ポリモルフィズム」[1] では以下のように紹介されている。

> 最後に，プログラム変換へのひとつの応用を述べておこう．始代数 $\mu X.F(X)$ と終代数 $\nu X.F(X)$ の等しさの応用である．この 2 つが等しいと，hylomorphism と呼ばれる技術を適用することができる．この論説ではちゃんと定義しなかったが，型 A 上の余帰納的定義 (coinduction) から，$A \Rightarrow \nu X.F(X)$ という関数が得られる．また，型 B 上の帰納的定義 (induction) から，$\mu X.F(X) \Rightarrow B$ という関数が得られる．いま，始代数と終代数は等しいとしているので，得られた 2 つの関数を合成することができ，$A \Rightarrow B$ の型をもつ関数ができる．これを hylomorphism と呼ぶ．この技術のポイントは，関数の合成に際して受け渡される，$\mu X.F(X) = \nu X.F(X)$ の型をもつ中間データが常に消去できることである．いわゆる融合規則の 1 つの場合である．

しかし、実際の関数型言語に関する論文の多くでは、始代数と終代数の等しさに関する説明はなく、Hylomorphism も以下のように定義している。

$$\begin{cases} [\![\,]\!]_{G,F} & : & \forall A, B.(GA \to A) \times (F \to G) \times (B \to FB) \to (B \to A) \\ [\![\phi, \eta, \psi]\!]_{G,F} & = & \mu(\lambda f.\phi \circ \eta \circ Ff \circ \psi) \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} FB \arrow[r, "F([\![\phi,\eta,\psi]\!]_{G,F})"] & FA \arrow[r, "\eta_A"] & GA \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[u, "\psi"] \arrow[rr, "[\![\phi,\eta,\psi]\!]_{G,F}"'] & & A \end{tikzcd}$$

この違いについての疑問から、データ型の領域が実際にどのように構成されるかについて興味をもち、今期は領域理論の初歩について学んだ。

2　半順序,CPO,連続関数

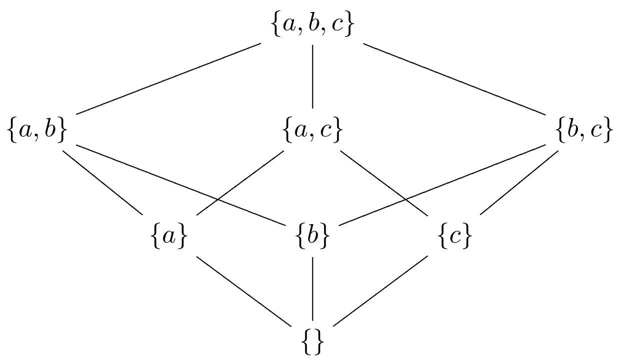
2.1　半順序

定義 1 半順序
D を集合、$\sqsubseteq$ を D 上の *2* 項関係とする。次の条件を満たすとき、$\sqsubseteq$ は半順序 *(partial order)* 関係

であるといい、$(D, \sqsubseteq)$ を半順序集合という。

1. 反射律: $x \sqsubseteq x$
2. 反対称律: $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq x$ ならば $x = y$
3. 推移律: $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$

例 1 冪集合と包含関係。$(pow\{a,b,c\}, \subseteq)$



ちなみに、このような図をハッセ図 *(Hasse's diagram)* とかハッセ線図とか呼ぶ。

定義 2 最小元

$$\exists c \in D. \forall d \in D. c \sqsubseteq d$$

であるとき、c を D の最小元 *(Least defined element)* と呼ぶ。

lifted domain では $\perp$ が最小元である。

定義 3 最小上界
$(D, \sqsubseteq)$ 半順序集合とする。$A \subseteq D$ の最小上界 *(least upper bound, lub)* とは次の条件を満たす $a \in D$ の事である。

1. すべての $x \in A$ に対して $x \sqsubseteq a$
2. $y \in D$ が全ての $x \in A$ に対して $x \sqsubseteq y$ ならば $a \sqsubseteq y$

A の最小上界を $\bigsqcup A$ と書く。また、A が 2 要素 $\{a, b\}$ だけからなるときは $a \sqcup b$ とも書く。

定義 4 *lifted domains*

$$A_\perp = A + \{\perp\}$$

$$x \sqsubseteq_{A_\perp} y \;\Leftrightarrow\; (x = \perp) \vee (x, y \in A \wedge x \sqsubseteq_A y)$$

例 2

$$\{\mathit{true}, \mathit{false}\}_\perp = \left(\begin{tikzcd} \mathit{true} \arrow[dr, dash] & & \mathit{false} \arrow[dl, dash] \\ & \perp & \end{tikzcd}\right)$$

例 3

$$\mathbb{N}_\perp = \left(\begin{tikzcd} 0 \arrow[drr, dash] & 1 \arrow[dr, dash] & 2 \arrow[d, dash] & 3 \arrow[dl, dash] & \cdots \arrow[dll, dash] \\ & & \perp & & \end{tikzcd}\right)$$

2.2　$\perp$ の意味

ボトム ($\perp$) は「未定義」を表す。ボトムでない要素はボトムよりも多くの情報を持っていて、$\sqsubseteq$ は対象が持っている情報量による比較と考える。例 2では true と false は同じ情報量を持っている。

lifted domain で $\perp$ を値に含めるのは、部分関数 (partial function) を扱いやすくするため。部分関数は、定義域全体に対して値が定義されているわけではないような関数。部分関数 $f : A \rightharpoonup B$ が入力 $a \in A$ に対して値が定義されていないことを $f(a) = \perp$ と表す。

コンピュテーションに注目すると、$\perp$ は「停止しない」ことや「値が全く定義されていない」事を意味する。$f : A \rightharpoonup B$ が ある $a \in A$ に対して値が定義されていない可能性があるとき、lifted domain を値域とする全域関数 (total function) $f : A \to B_\perp$ として扱うことがある。値域が lifted domain $B_\perp$ になっているのは、この関数は「入力によっては止まらないかもしれない」と事を意味しており、そのような場合に $\perp$ を値として持つと考える。

2.3　CPO

定義 5 *chain*

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \ldots$$

のような有限または無限の列を *chain* とよぶ。

定義 6 完備半順序
$(D, \sqsubseteq)$ の任意の *chain* $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \ldots$ が最小上界 $\bigsqcup_{i=0}^{\infty} x_i$ を持つとき、$(D, \sqsubseteq)$ は完備半順序 *(complete partial ordering, CPO)* だという。

例 4 $(\mathbb{N}, \leq)$ は *CPO* ではないが、$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ は *CPO*

定義 7 *pointed CPO*
最小元を持つ *CPO* を *pointed CPO* と呼ぶ。

pointed CPO 上の連続関数は最小不動点を持つという便利な性質を持つので、プログラムの意味論を考えたりする際に、よく使う。

2.4 部分関数の順序

部分関数を順序対の集合と考え、その包含関係によって部分関数の半順序関係を定義すると、pointed CPO になる。最小元は値が全く定義されていないような部分関数 $\perp$ で、chain $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq \ldots$ の最小上界 $\bigsqcup_{i=0}^{\infty} x_i$ は

$$\begin{cases} f(x) & = & \perp & \text{(if } f_i \text{ is undefined for all } i\text{)} \\ f(x) & = & f_i(x) & \text{(if } f_i(x) \text{ is defined for some } i\text{)} \end{cases}$$

で定義される関数 f である。

順序対の集合として考えると、この最小元と最小上界はそれぞれ と $\bigcup\{f_i | i \geq 0\}$ である。

定義 8 単調な関数
部分関数 $f : A \rightharpoonup B$ は以下の条件を満たすとき、単調な関数 *(monotonic function)* と呼ばれる。

- $x \sqsubseteq_A y$ ならば $f(x) \sqsubseteq_B f(y)$

定義 9 連続関数
以下の条件を満たす単調な関数を連続関数 *(Continuous Function)* という。

$$f(\bigsqcup A) = \bigsqcup\{f(x) | x \in A\}$$

定理 1 *D* が *pointed CPO* ならば、連続関数 $f : D \to D$ には最小不動点が存在し、$\mathit{fix}(f) = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp)$ と等しい。

証明 1 f は単調なので、*chain*

$$f^0(\perp) \sqsubseteq f^1(\perp) \sqsubseteq f^2(\perp) \sqsubseteq \ldots$$

をなす事は明らかである。

また、

$$\begin{array}{ll} & f(\mathit{fix}(f)) \\ = & f(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp)) \\ = & f(f^0(\perp) \sqcup f^1(\perp) \sqcup f^2(\perp) \sqcup \ldots) \\ = & f^1(\perp) \sqcup f^2(\perp) \sqcup f^3(\perp) \sqcup \ldots \\ & (\because f\text{の連続性}) \\ = & f^0(\perp) \sqcup f^1(\perp) \sqcup f^2(\perp) \sqcup f^3(\perp) \sqcup \ldots \\ & (\because f^0(\perp) \sqcup x = \perp \sqcup x = x) \\ = & \bigsqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp) \end{array}$$

より、$\mathit{fix}(f)$ は f の不動点である。

また、f に他の不動点 $d \in D$ が存在したとすると、$\forall i \geq 0. f^i(d) = d$ なので、f の単調性と $\perp \sqsubseteq d$ から $f^i(\perp) \sqsubseteq f^i(d) = d$ であり、したがって、$\mathit{fix}(f) = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp) \sqsubseteq d$ が言え、$\mathit{fix}(f) \sqsubseteq d$ である。

よって、$\mathit{fix}(f)$ は最小の不動点である。

2.5 汎関数の不動点

帰納的に定義された関数 $D \rightharpoonup D$ の意味を、汎関数 $[D \rightharpoonup D] \to [D \rightharpoonup D]$ の最小不動点として与える事ができる。

例 5 再帰的に定義された関数

$$f(x) = \ \mathit{if}\, x = 0\ \mathit{then}\, 1\ \mathit{else}\ x \times f(x-1)$$

は

$$F(f)(x) = \mathit{if}\, x = 0\ \mathit{then}\ 1\ \mathit{else}\ x \times f(x-1)$$

とおくと、

$$f = F(f)$$

と書けるので、F の最小不動点によって意味を与える事ができる。

3 極限/余極限

定義 10 ダイアグラム
圏 C を有向グラフと考えたときのグラフ準同型 $\Delta : D \to C$ を C における D 形のダイアグラムという。

定義 11 錐 *(cone)*
$\Delta : D \to C$ をダイアグラムとする。Δ の錐 $p : P \to \Delta$ は C の対象 P と、D の対象をインデックスとする射の族 $p_k : P \to \Delta(k)$ からなる。

定義 12 可換錐 *(commutative cone)*
$\Delta : D \to C$ をダイアグラム、$p : P \to \Delta$ をその錐とする、すべての D のアロー $a : k \to k'$ について $\Delta(a) \circ p_k = p_{k'}$ が成り立つとき、p を可換錐という。

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_k"] \arrow[dr, bend right, "p_{k'}"'] & \Delta(k) \arrow[d, "\Delta(a)"] \\ & \Delta(k') \end{tikzcd}$$

定義 13 極限錐 *(limit cone)*
$\Delta : D \to C$ をダイアグラムとする。可換錐 $p : P \to \Delta$ は、任意の可換錐 $q : Q \to \Delta$ について、

$\forall k \in D.\ p_k \circ h = q_k$ を満たす射 $h : Q \to P$ がユニークに存在するとき、極限錐という。

$$\begin{tikzcd}
& & \Delta(k) \arrow[dd, "\Delta(f)"] \\
Q \arrow[r, "h"] \arrow[urr, bend left, "q_k"] \arrow[drr, bend right, "q'_k"'] & P \arrow[ur, "p_k"] \arrow[dr, "p'_k"] & \\
& & \Delta(k')
\end{tikzcd}$$

これらの定義の双対を考えることで、余錐 (cocone) や余極限余錐 (colimit cocone) も同様に定義される。

例 6 直積 *(product)*
直積は、恒等射以外に射を持たないような圏 D を形とするダイアグラムの極限錐である。

4　CPO と極限錐

定義 14 連続関数の順序
CPO D, E の間の 連続関数全体からなる集合 $[D \to E]$ は以下のように定まる半順序 $\sqsubseteq$ に関して *CPO* である。

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

この半順序の定義は前回の部分関数の半順序の拡張になっている。

定義 15 $\mathcal{CPO}$
$\mathcal{CPO}$ を、*CPO* を対象、*CPO* 間の連続関数を射とする圏とする。

定義 16 *adjunction*

$$\forall x \in P. \forall y \in Q.\ f(x) \sqsubseteq_Q y \iff x \sqsubseteq_P g(y)$$

を満たす $f : P \to Q,\ g : Q \to P$ のペア (f, g) を随伴 *(adjunction)* という。f を *lower adjoint*, g を *upper adjoint* という。

補題 1 単調な関数 f, g が *adjoint* の対であるとき、$\mathbf{1}_P \sqsubseteq g \circ f$ と $f \circ g \sqsubseteq \mathbf{1}_Q$ が成り立つ。

証明 2 $x \sqsubseteq x \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(x) \iff x \sqsubseteq g(f(x))$ より、$\mathbf{1}_P \sqsubseteq g \circ f$
$x \sqsubseteq x \Rightarrow g(x) \sqsubseteq g(x) \iff f(g(x)) \sqsubseteq x$ より、 $f \circ g \sqsubseteq \mathbf{1}_Q$

補題 2 $\mathcal{CPO}$ では、単調な関数の *lower adjoint* は存在すればユニークである。同様に単調な関数の *upper adjoint* も存在すればユニークである。

証明 3 $f : D \to E$ と $f' : D \to E$ が共に $g : E \to D$ の *lower adjoint* だとすると、

$$\begin{array}{rcrcl}
 & & f \circ g & \sqsubseteq & \mathbf{1}_E \\
 & & (f \circ g) \circ f' & \sqsubseteq & \mathbf{1}_E \circ f' \\
f \circ \mathbf{1}_D & \sqsubseteq & f \circ (g \circ f') & \sqsubseteq & \mathbf{1}_E \circ f' \\
 & & f & \sqsubseteq & f'
\end{array}$$

同様にして $f' \sqsubseteq f$ がいえ、したがって $f = f'$

また、単調な関数の *upper adjoint* が存在すればユニークであることも、同様にして言える。

定義 17 埋め込み *(embedding)* と射影 *(projection)*
随伴 (f, g) が $g \circ f = 1_P$ であるとき、f を埋め込み *(embedding)*, g を射影 *(projection)* という。

定義 18 *Directed Set*
半順序集合 D は、任意の有限部分集合 $F \subset D$ が最小上界を持つとき、*directed set* という。

例 7 $(\mathbb{N}, \leq)$ は *directed set* の例である。

定義 19 *projective diagram*
directed set D から

$$\begin{cases} V &= D \\ E &= \{s \to t \mid s \sqsupseteq t \in D\} \end{cases}$$

で定義される有向グラフ (V, E) の形をしたダイアグラムを *projective diagram* といい、$\Delta : D \to C$ などと書く。

定義 20 $\mathcal{CPO}_p$ を、*CPO* を対象、射影を射とする圏とする。同様に $\mathcal{CPO}_e$ を、*CPO* を対象、埋め込みを射とする圏とする。埋め込みと射影の間には対応関係があるので、$\mathcal{CPO}_p$ と $\mathcal{CPO}_e$ は双対の関係にある。

定理 2 $\mathcal{CPO}_p$ は *projective diagram* $\Delta : D \to \mathcal{CPO}_p$ の極限錐を持つ。

証明 4 P, $p_i : P \to \Delta(i)$, $e_i : Delta(i) \to P$ を

$$\begin{cases} P &= \{(x_i)_{i \in D} \in \prod_i \Delta(i) \mid i \sqsubseteq j \in D \Rightarrow g_{ji}(x_j) = x_i\} \\ e_i(x)_j &= (g_{kj} \circ f_{ki})(x) \ where \ i, j \sqsubseteq k \in D \\ p_i((x_j)_{j \in D}) &= x_i \end{cases}$$

と定義する。ただし、g_{ji}, f_{ji} はそれぞれ、*projective diagram* によって与えられる射影と、それに対応する埋め込みとする。

すると、

$$\begin{aligned} (p_i \circ e_i)(x) &= p_i(((g_{kj} \circ f_{ki})(x))_{j \in D}) && (e_i \text{ の定義より}) \\ &= (g_{ki} \circ f_{ki})(x) && (p_i \text{ の定義より}) \\ &= \mathbf{1}_{\Delta(i)}(x) && (f_{ki} \text{ と } g_{ki} \text{ は埋め込みと射影}) \\ &= x \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} (e_i \circ p_i)((x_j)_{j \in D}) &= ((g_{kj} \circ f_{ki})(x_i))_{j \in D} && (p_i \text{ と } e_i \text{ の定義より}) \\ &= ((g_{kj} \circ f_{ki})(g_{ki}(x_k)))_{j \in D} && (P \text{ の定義より、} (g_{ki}(x_k)) = x_i) \\ &\sqsubseteq (g_{kj}(x_k))_{j \in D} && (f_{ki} \circ g_{ki} \sqsubseteq \mathbf{1}_{\Delta(k)}) \\ &= (x_j)_{j \in D} && (P \text{ の定義より、} (g_{kj}(x_k)) = x_j) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{cases} p_i \circ e_i &= \mathbf{1}_{\Delta(i)} \\ e_i \circ p_i &\sqsubseteq \mathbf{1}_P \end{cases}$$

を満たすので、(e_i, p_i) は埋め込みと射影の対である。
次に、

$$\begin{array}{ll} & g_{kk'}(p_k((x_i)_{i\in D})) \\ = & g_{kk'}(f_{kk'}(x_{k'})) \\ = & (g_{kk'} \circ f_{kk'})(x_{k'}) \\ = & \mathbf{1}_{\Delta k'}(x_{k'}) \\ = & x_{k'} \\ = & p_{k'}((x)_i)_{i\in D}) \end{array}$$

より $g_{kk'} \circ p_k = p_{k'}$ であり、$p : P \to \Delta$ は可換錐である。
次に、$q : Q \to \Delta$ を可換錐とすると、$h(x)_i = (e_i \circ q_i)(x)$ で定義される $h : P \to Q$ は、明らかに $p_i \circ h = q_i$ を満たすユニークな射になっている。

補題 3 $\mathcal{CPO}_p$ と $\mathcal{CPO}_e$ の双対性から、$\mathcal{CPO}_p$ で $p : P \to \Delta$ が *limit cone* であるとき、$\mathcal{CPO}_e$ で $e : \Delta \to P$ は *colimit cocone* である。

5 D_∞ モデル

型無しλ計算の表示的意味論を与えるためには、領域方程式 $D \cong D \to D$ を満たす空間 D が必要である。しかし、通常の集合でこの条件を満たすのは 1 点集合だけであり、この自明なモデルからは何の情報も得られない。
以下で構成する CPO D_∞ とその上の連続関数全体はこの件を満たす自明でないモデルである。

$$D_\infty \cong [D_\infty \to D_\infty]$$

定義 21 $\mathcal{CPO}_p$ 上の、$(\mathbb{N}, \leq)$ 形の *projective diagram*

$$D_0 \xleftarrow{\psi_{1,0}} D_1 \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\psi_{n,n-1}} D_n \xleftarrow{\psi_{n+1,n}} D_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

を以下のように定義する。

$$\begin{cases} D_0 & = & \textit{2}\ \text{要素以上からなる}\ \textit{pointed CPO} \\ D_{n+1} & = & [D_n \to D_n] \\ \psi_{n,m} & : & D_n \to D_m \ \textit{where}\ n \geq m \\ \psi_{n,m} & = & \psi_n \circ \psi_{n-1} \circ \cdots \circ \psi_{m+2} \circ \psi_{m+1} \end{cases}$$

ただし、ここで、

$$\begin{cases} \varphi_n & : & D_n \to D_{n+1} \\ \psi_n & : & D_{n+1} \to D_n \\ \varphi_0(x)(y) & = & x \\ \psi_0(f) & = & f(\perp_{D_0}) \\ \varphi_{n+1}(x) & = & \varphi_n \circ x \circ \psi_n \\ \psi_{n+1}(y) & = & \psi_n \circ y \circ \varphi_n \end{cases}$$

である。

$$\begin{tikzcd}
D_n & D_{n+1} \arrow[l, "\psi_n"'] \\
D_n \arrow[from=1-1, "x"'] \arrow[r, "\varphi_n"'] & D_{n+1} \arrow[from=1-2, "\varphi_{n+1}(x)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
D_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\psi_{n+1}(y)"'] & D_{n+1} \arrow[d, "y"] \\
D_n & D_{n+1} \arrow[l, "\psi_n"]
\end{tikzcd}$$

補題 4 (φ_n, ψ_n) は埋め込み、射影のペアである。

証明 5 $\psi_n \circ \varphi_n = \mathbf{1}_{D_n}$ と $\varphi_{n+1} \circ \psi_{n+1} \sqsubseteq \mathbf{1}_{D_{n+1}}$ を帰納法で証明する。
$n = 0$ のとき、

$$\psi_0(\varphi(x)) = \psi_0(\lambda y.x) = ((\lambda y.x)\bot_{D_0}) = x$$
$$\varphi(\psi(f)) = \varphi(f(\bot_{D_0})) = \lambda y.f(\bot_{D_0}) \sqsubseteq f$$

より、

$$\psi_0 \circ \varphi_0 = \mathbf{1}_{D_0}$$
$$\varphi_0 \circ \psi_0 \sqsubseteq \mathbf{1}_{D_1}$$

$n = k$ について成り立つとすると、

$$\begin{aligned}
\psi_{k+1}(\varphi_{k+1}(x)) &= \psi_k \circ (\varphi_{k+1}(x)) \circ \varphi_k \\
&= \psi_k \circ \varphi_k \circ x \circ \psi_k \circ \varphi_k \\
&= \mathbf{1}_k \circ x \circ \mathbf{1}_k \\
&= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{k+1}(\psi_{k+1}(y)) &= \varphi_k \circ (\psi_{k+1}(y)) \circ \psi_k \\
&= \varphi_k \circ \psi_k \circ y \circ \varphi_k \circ \psi_k \\
&\sqsubseteq \mathbf{1}_{k+1} \circ y \circ \mathbf{1}_{k+1} \\
&= y
\end{aligned}$$

より、

$$\psi_{k+1} \circ \varphi_{k+1} = \mathbf{1}_{D_{k+1}}$$
$$\varphi_{k+1} \circ \psi_{k+1} \sqsubseteq \mathbf{1}_{D_{k+2}}$$

したがって、帰納法によって、

$$\psi_n \circ \varphi_n = \mathbf{1}_{D_n}$$
$$\varphi_n \circ \psi_n \sqsubseteq \mathbf{1}_{D_{n+1}}$$

であり、(φ_n, ψ_n) は埋め込みと射影の対になっている。
当然、$\psi_{n,m} : D_n \to D_m$ も射影になっている。

証明 6 $(\mathbb{N}, \leq)$ は *directed set* であるので、このダイアグラムには極限が存在し、

$$D_\infty = \{(x_0, x_1, \ldots) | \psi_{n,m}(x_n) = x_m, n \geq m \in \mathbb{N}\}$$

で表される。

$$\begin{tikzcd}
 & & D_\infty \arrow[dll, "p_0"'] \arrow[dl, "p_1"] \arrow[d] \arrow[dr, "p_n"] \arrow[drr, "p_{n+1}"] \arrow[drrr] & & & \\
D_0 & D_1 \arrow[l, "\psi_0"'] & \cdots \arrow[l, "\psi_1"'] & D_n \arrow[l] & D_{n+1} \arrow[l, "\psi_n"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

定義 22 $\Phi : D_\infty \to [D_\infty \to D_\infty]$ と $\Psi : [D_\infty \to D_\infty] \to D_\infty$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} \Phi(x) &=& \bigsqcup_{n=0}^{\infty} e_n \circ p_{n+1}(x) \circ p_n \\ \Psi(f) &=& (y_0, y_1, \ldots) \; \textit{where} \; y_{n+1} = p_n \circ f \circ e_n, \; y_0 = \psi_0(y_1) \end{cases}$$

定理 3

$$\begin{cases} \Psi \circ \varphi &=& I_{D_\infty} \\ \Phi \circ \Psi &=& I_{[D_\infty \to D_\infty]} \end{cases}$$

が成り立つ。

証明 7 *(省略)*

5.1 λ 式の表示的意味論

$D_\infty \cong [D_\infty \to D_\infty]$ を得ることが出来たので、Λ を λ 式の集合、U を変数の集合、$\mathrm{Env} = U \to D_\infty$ を「環境」の集合として意味関数 $[\![]\!] : \Lambda \to (\mathrm{Env} \to D_\infty)$ を以下のように定めることで、λ 式の表示的意味論を与えることが出来る。

$$\begin{cases} [\![x]\!]_\rho &=& \rho(x) \\ [\![EF]\!]_\rho &=& \Phi([\![E]\!])([\![F]\!]) \\ [\![\lambda x.E]\!]_\rho &=& \Psi(f) \text{ where } f(u) = [\![E]\!]_{\rho\{x \to u\}} \end{cases}$$

6 最後に

最初に領域理論に興味を持った理由である「始代数と終代数が等しくなる条件」だが、参考文献 [1] によれば、

- 不動点結合子 fix_A が、おのおのの型 A に対し存在する。
- 始代数 $\mu X.F(X)$ と終代数 $\nu X.F(X)$ は等しい。
- 正負両方の位置にパラメータを持つようなオペレータに対しても、不動点が存在する

の 3 つが同値だということである。しかし、今期はそこまで学ぶ事が出来ず、少し残念である。

また、聞いた話によると、$\mathcal{CPO}_\perp$ を、pointed CPO とその間の正格 (strict) な連続関数からなる圏とすると、正格性を保存するような関手 $F : \mathcal{CPO}_\perp \to \mathcal{CPO}_\perp$ の始代数と終余代数は、そのよ

うな条件を満たすそうであり、実際の関数型言語に関する理論ではこのモデルを使っている事が多いようだ。

しかし、終余代数によって定義されるデータは lazy なものという印象があるので、正格な関数だけを考えるとというのはまだいまいちピンと来ないというのが正直なところである。そのような事も含めて領域理論にはまだまだ興味をそそられる。

参考文献

[1] 長谷川立「チュートリアル パラメトリック・ポリモルフィズム」
コンピュータソフトウェア VOL.20 NO.2 / MARCH 2003

[2] Prakash Bulusu and Sadanand Kota "Least Fixed Point Theory"
`http://www.cis.ksu.edu/~stefan/Teaching/CIS705/Reports/BulusuKota-1.pdf`

[3] 萩野達也「2000 年度 秋学期 知識処理論 講義資料」
`http://www.tom.sfc.keio.ac.jp/~hagino/kp00/`

[4] 「再帰データ領域 D∞モデル」
`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~cs/csnyumon/`

[5] 長谷川 真人, 「自己言及の論理と計算」
`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~hassei/selfref.pdf`

[6] 高橋 正子, 『計算論 - 計算可能性とラムダ計算』
ISBN: 4764901846

[7] Michael Mislove "An Introduction to Domain Theory - Notes for a Short Course"
`http://www.dimi.uniud.it/~lenisa/notes.pdf`