

Elementary universal mapping properties その2

総合政策学部 2年
酒井政裕

2002年6月28日

1 Product(続き)

1.1 交換法則, 単位元, 結合法則

数の乗算と同様に、これらの基本的な法則が成り立つ。(ただしイコールについては同型関係について)

$$A \times B \cong B \times A \quad (1)$$

$$\mathbf{1} \times A \cong A \times \mathbf{1} \cong A \quad (2)$$

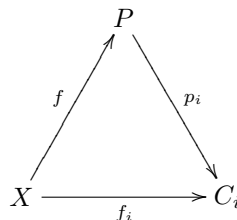
$$A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C \quad (3)$$

これらは、個別のユニバーサル・マッピング・プロパティから導出する事が出来るが、product の定義を拡張してオブジェクトの族 (family) に対しても定義してやることで、直接導くことが出来る。

まず、 I をインデックスの集合とし、 I の各元 i について C_i を \mathcal{C} のオブジェクトとする。 C_i と C_j が同じオブジェクトでも構わないし、 I は空でも構わない。

定義 1 *A product of this indexed family is an object P together with maps $P \xrightarrow{p_i} C_i$ (one for each i), having the universal property:*

Given any object X and any maps $X \xrightarrow{f_i} C_i$ (one for each i) there is exactly one map $X \xrightarrow{f} P$ such that all the triangles below commute, i.e. such that $p_i f = f_i$ for each i in I .

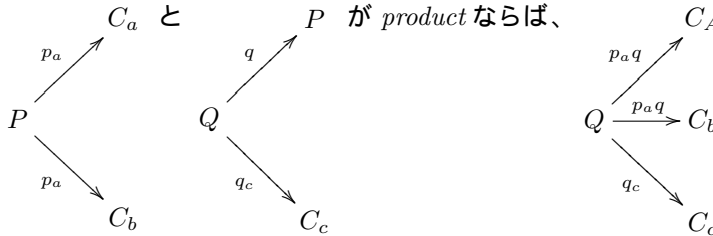


定理 1 (product の一意性) 射 $P \xrightarrow{p_i} C_i$ と $Q \xrightarrow{q_i} C_i$ が、 P と Q を共にこの族の product とするのならば、(Q が product であることより) I に含まれる各 i について $q_i f = p_i$ となるような射 $P \xrightarrow{f} Q$ がただ一つだけ存在し、同型射である。

証明 前回やった、ペアのオブジェクトの product の場合とほとんど同じなので、証明は略。

ある族の product を $\prod_I C_i$ と表記し、その projection map を p_i と表記する。

演習 1 P が product ならば、 Q が product ならば、 C_A は triple product である



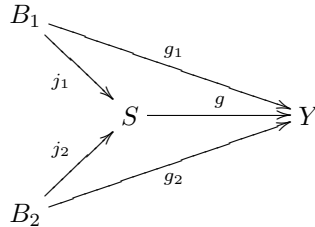
ことを示せ。

この exercise で $(C_a \times C_b) \times C_c$ がこの族の triple product であることが言えた。同様に、 $C_a \times (C_b \times C_c)$ もこの族の triple product であることが言える。したがって、product の一意性から、 $(C_a \times C_b) \times C_c \cong C_a \times (C_b \times C_c)$

2 Sum

Product の双対。Coproduct と呼ばれる。

定義 2 A pair $B_1 \xrightarrow{j_1} S \xleftarrow{j_2} B_2$ makes S a **sum** of B_1 and B_2 if each object Y and each pair $B_1 \xrightarrow{g_1} Y, B_2 \xrightarrow{g_2} Y$, there is exactly one map $S \xrightarrow{g} Y$ for which both $g_1 = gj_1$ and $g_2 = gj_2$.



Note: The maps j_1, j_2 are called **injection** map for the sum. As with products, we often choose a special sum of B_1 and B_2 and denote it by $B_1 + B_2, j_1, j_2$.

product において、 $X \rightarrow A \times B$ が $X \rightarrow A, X \rightarrow B$ と同じ情報を持っていたのと同様に、sum では $A + B \rightarrow X$ が $A \rightarrow X, B \rightarrow X$ と同じ情報を持っている。

$$\frac{X \rightarrow A \times B}{X \rightarrow A, X \rightarrow B}, \frac{A + B \rightarrow X}{A \rightarrow X, B \rightarrow X}$$

2.1 交換法則, 単位元, 結合法則

Product と同様。

$$A + B \cong B + A \tag{4}$$

$$\mathbf{0} + A \cong A + \mathbf{0} \cong A \tag{5}$$

$$A + (B + C) \cong (A + B) + C \tag{6}$$

また、ある族の Coproduct を $\coprod_I C_i$ と表記し、その injection map を j_i と表記する。

3 分配則 / Distributive Law

Product と Sum と Initial object の存在する多くの圏では、Product と Sum の分配則

$$(A \times B) + (A \times C) \cong A \times (B + C) \quad (7)$$

$$0 \cong A \times 0 \quad (8)$$

は成り立たない。

しかし、それらの UMP(ユニバーサル・マッピング・プロパティ) を反映した射が存在し、それを standard maps と呼ぶ。

$$(A \times B) + (A \times C) \rightarrow A \times (B + C) \quad (9)$$

$$0 \rightarrow A \times 0 \quad (10)$$

存在の証明

$$\frac{\frac{A \times B \rightarrow B \quad B \rightarrow B + C}{A \times B \rightarrow B + C} \quad \frac{A \times B \rightarrow A \quad (UMPOf \times)}{A \times B \rightarrow A \times (B + C)}}{\frac{A \times C \rightarrow C \quad C \rightarrow B + C}{A \times C \rightarrow B + C} \quad \frac{A \times C \rightarrow A \quad (UMPOf \times)}{A \times C \rightarrow A \times (B + C)}}{\frac{(A \times B) + (A \times C) \rightarrow A \times (B + C)}{(A \times B) + (A \times C) \rightarrow A \times (B + C)} (UMPOf +)}$$

定義 3 上で定義した射が同型射であるとき、その圏は分配則を満たすという。または、その圏は *distributive* だともいう。

集合の圏、集合上の自己射 (endomaps) の圏、グラフの圏は、分配則を満たす圏の例である。線形圏 (linear category) は distributive でない圏の例である。

distributive でない圏では「sum」という言葉の使用は避けられ、単に product の双対として「coproduct」の方が好まれる。

参考文献

- [1] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel “Conceptual Mathematics - A first introduction to categories”